Funciones recursivas (sucesiones recursivas)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) = n^2$

$a(n) = a_n = \frac{1}{n}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$= \{0, 0+1, (0+1)+1, ((0+1)+1)+1, \ldots\}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}\; Q(n)$ es verdadero

Regla de inducción

$(Q(0)$ es verdadero $\&\; Q(k) \implies Q(k+1))$ entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}\; Q(n)$ es verdadero

Definiciones recursivas

Ejemplo 1

$a_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$

$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$

$a_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = 1$

$a_2 = \sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3$

$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = \sum_{k=1}^{3} = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

Ejemplo 2

$b_1 = \sqrt{3}$

$b_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$

$b_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$

$b_4 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}}$

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{si } n = 1 \\ \sqrt{3 + b_{n-1}} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \Pi_{k=1}^{n} k$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)) \cdot n$$
$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (n-1)! \cdot n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$4! = 3! \cdot 4 = (2! \cdot 3) \cdot 4 = ((1! \cdot 2) \cdot 3) \cdot 4$$
$$4! = ((1 \cdot 2) \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

$$(-2)! = (-3)! \cdot -2 = ((-4)! \cdot -3) \cdot -2 = \ldots$$

Ejemplo 4: sucesión de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$
$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$