

Tarea 05

Física Computacional. Grupo 8423.

Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones: debes **escoger cinco de los siguientes ejercicios** y resolverlos dentro de un Notebook titulado `tarea05_apellidoPaterno_nombre.ipynb` . Entregar dicho Notebook mediante Google Classroom

La separación entre ejercicios debe de ser completamente clara. El uso de celdas de Markdown así como los comentarios del código se recomiendan ampliamente.

1. Uno de los problemas más importantes en la historia de la física es el **problema de tres cuerpos**, por su equivalencia con encontrar la trayectoria exacta del sistema Sol-Luna-Tierra. Supongamos que tenemos tres cuerpos en dos dimensiones, cuyas posiciones en coordenadas cartesianas y masas se denotan $\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, m_i para $i = 1, 2, 3$. Usando unidades naturales, la fuerza que experimenta el cuerpo i es

$$F_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \frac{m_i m_k}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

- **A)** Plantea la segunda ley de Newton para cada cuerpo. Así, obtendrás un sistema de 6 ecuaciones diferenciales de segundo orden (una para cada coordenada de cada cuerpo). Convierte ese sistema en un sistema de 12 ecuaciones diferenciales de primer orden.
- **B)** Resuelve el sistema utilizando el método de tu preferencia (no Euler) para valores arbitrarios de las masas y condiciones iniciales arbitrarias. Haz una animación de la trayectoria de los cuerpos.

Sugerencia 1: haz la animación varias veces para un paso de tiempo pequeño, y encuentra un número óptimo de cuadros por segundo para que tu animación se vea bien.

Sugerencia 2: Ten cuidado con las condiciones iniciales pues el sistema puede cambiar muy rápidamente de posición.

- **C)** Supón que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Resuelve el sistema para las siguientes condiciones iniciales

$$\mathbf{r}_1(0) = -\mathbf{r}_3(0) = (-0.97000436, 0.24308753)$$

$$\mathbf{r}_2(0) = (0, 0)$$

$$\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_3(0) = (0.4662036850, 0.4323657300)$$

$$\mathbf{v}_2(0) = (-0.93240737, -0.86473146)$$

Realiza una animación de la trayectoria y confirma que la trayectoria es una curva cerrada en forma de ∞

- **D)** Revisa [esta página](#) y grafica las trayectorias para otras condiciones iniciales que den una curva cerrada como solución.
- **E) (Opcional)** resuelve un sistema que corresponda a una trayectoria cerrada utilizando un integrador simpléctico, y compáralo con la solución obtenida usando el método de Runge-Kutta de orden 4. ¿Ambas trayectorias se quedan cerradas todo el tiempo?

2. En 1963, Edward Lorenz propuso un sistema matemático para describir la convección atmosférica (muy importante para estudiar meteorología) mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

Con σ , ρ y β constantes.

A) Resuelve el sistema para los siguientes parámetros

- $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 15$
- $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$

Gráfica las variables como función del tiempo. Haz gráficas y animaciones de sus espacios fase 2D $((x(t), y(t)), (x(t)z(t)), (y(t), z(t)))$ y el 3D $((x(t), y(t), z(t)))$.

¿Qué sucede con las trayectorias del espacio fase?

Sugerencia: utiliza un buen método (no Euler) para resolver el sistema

B) Toma dos condiciones iniciales muy similares entre sí, pero distintas, y resuelve el sistema para ambas. Haz una gráfica de la norma de la diferencia entre ambas soluciones como función del tiempo. ¿Qué comportamiento tiene?

3. Un buen modelo compartamental epidemiológico es el modelo SEIRS, según el cuál una población susceptible a una enfermedad se divide en población susceptible a la enfermedad S , población expuesta pero no infectada E , población infectada I y población recuperada R .

Cuando una persona susceptible entra en contacto con el virus, pasa a estar expuesta y de ahí pasa a estar infectada. Los infectados se recuperan y, después de un periodo de inmunidad, vuelve a ser susceptible. El sistema está descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI + \delta R \\ \dot{E} &= \beta SI - \epsilon E \\ \dot{I} &= \epsilon E - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I - \delta R\end{aligned}$$

Los parámetros del modelo son los siguientes:

Parametro	Interpretación
β	Probabilidad de infección entre una persona susceptible y otra infectada
ϵ	Probabilidad de pasar de expuesto a infectado. $1/\epsilon$ es el tiempo promedio de incubación del virus
γ	Probabilidad recuperación de un infectado

Parametro	Interpretación
δ	Probabilidad de pasar de recuperado a susceptible. $1/\delta$ es el tiempo promedio de inmunidad después de infectarse

- **A)** Tomando condiciones iniciales tales que siempre se cumplan $I(t_0) = R(t_0) = 0$ $S(t_0) + E(t_0) = 1$, resuelve el modelo SIERS para distintos valores de β y γ . Grafica las variables S , I y R como función del tiempo, así como el espacio fase 3D $(S(t), I(t), R(t))$. ¿Cómo afectan los parámetros β , ϵ , γ y δ al sistema? ¿Coincide con tu intuición?
- **B)** El sistema tiene un punto de equilibrio en $S = 1, E = I = R = 0$, que corresponde al momento donde la enfermedad siempre deja de estar presente en la población ¿El sistema siempre llega a este punto de equilibrio? ¿Existe algún otro equilibrio del sistema? Resuelve el sistema para distintos valores de γ y responde estas preguntas.
- **C)** Supón que la tasa de infección β no es una constante si no una función oscilatoria, de la forma

$$\beta(t) = 0.3 + 0.2 \cos t$$

Resuelve el modelo con esta tasa variable. ¿Cambia su comportamiento?

4. El ejercicio 4 de la clase 16
5. El ejercicio 2 de la clase 18 (no hace falta que hagas la comparación con los métodos de Shooting)
6. Una partícula cuántica unidimensional está en un potencial de la forma

$$v(x) = \begin{cases} 50 \cos(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Resuelve numéricamente la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y encuentra las primeras 5 amplitudes de probabilidad $\psi_k(x)$ y sus correspondientes energías ϵ_k . Grafica las amplitudes de probabilidad. ¿Se parecen a las soluciones de un pozo infinito normal?